1 | Rekursion

Berechnen Sie das Folgeglied s_{1000} in der folgendermaßen definierten Folge ganzer Zahlen:

$$\begin{aligned} s_1 &= -1 \\ s_2 &= 1 \\ s_3 &= 2 \\ s_{3+k} &= 2s_k + 3s_{1+k} \qquad \text{für } k \geqslant 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} s_{1+k} \\ s_{2+k} \\ s_{3+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_k \\ s_{1+k} \\ s_{2+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad \text{für } k \geq 1$$

bzw. $$\begin{pmatrix} s_k \\ s_{k+1} \\ s_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad \text{für } k \geq 2$$

0,5

Sei also $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 2 & 3 & -X \end{pmatrix} = (-X)^3 + 2 + 3X$$

$$= -X^3 + 3X + 2$$ 0,5

Nullstelle: -1

$$\begin{array}{l} (-X^3 + 3X + 2) : (X+1) = -X^2 + X + 2 \\ \underline{-X^3 - X^2} \\ \qquad X^2 + 3X + 2 \\ \qquad \underline{X^2 + X} \\ \qquad\qquad 2X + 2 \end{array}$$

Daher:

$$\begin{aligned} \chi_A &= -(X+1)(X^2 - X - 2) \\ &= -(X+1)(X+1)(X-2) \\ &= -(X+1)^2(X-2) \end{aligned}$$

$$\mu_A = \begin{cases} (X+1)(X-2) & \text{oder} \\ (X+1)^2(X-2) \end{cases}$$

$$(A + \mathbb{1}) \cdot (A - 2 \cdot \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ also}$$

$$\mu_A = (X+1)^2(X-2)$$ 0,5

Haupträume:

$$Hau(A;-1) = \ker\left((A+\mathbb{1})^2\right) = \ker\left(\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\2&3&1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \ker\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\4&8&4\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\cup|$$

$$\ker(A+\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\2&3&1\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

0,5

$$Hau(A;2) = \ker(A-2\cdot\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&1\\2&3&-2\end{pmatrix} = \dots = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right\rangle$$ 0,5

Jordanbasis von $Hau(A;-1)$: Wähle U_2 so, dass gilt:

$$\ker\left((A+\mathbb{1})^2\right) = \ker(A+\mathbb{1}) \oplus U_2, \quad \text{also}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \oplus U_2$$

$$\|*$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Begründung zu (*):

A $$\left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \operatorname{im}\begin{pmatrix}-2&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix} = \operatorname{im}\begin{pmatrix}-2&1\\1&-1\\0&1\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

elementare Spaltenumformungen ändern Bild nicht
(elementare Zeilenumformungen ändern Kern nicht)
– vgl. Beweis zu Korollar 6.22

B Austauschlemma: $$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$ $1 \neq 0$

Eine Möglichkeit: $U_2 := \left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ 0,5

Jordanbasis von $Hau(A;-1)$ demnach

$$\left((A+\mathbb{1})\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$ 0,5

Jordanbasis von $\mathrm{Hau}(A;2) = \mathrm{Eig}(A;2)$: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ (s.o.)

Insgesamt erhalten wir folgende Jordanbasis:

$$J = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

0,5

JNF:
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\hat{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{N}}$$

J^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I}+ \\ \text{I}- \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I}+2 \\ |\cdot(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 9 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \ |\cdot \tfrac{1}{9}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & 2/9 & 1/9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I}-6 \ \ \text{I}+4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/9 & 8/9 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & -6/9 & -3/9 & 3/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & 2/9 & 1/9 \end{array} \right)$$

Also $J^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & -5 \\ -6 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5

(Probe:

$$J^{-1} A J = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & -5 \\ -6 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & -5 \\ -6 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

)

Nun ist

$$A^k = J\hat{A}^k J^{-1} = J\cdot(\hat{D}+\hat{N})^k J^{-1}$$

$$= J\cdot\Big(\hat{D}^k + k\cdot\hat{D}^{k-1}\cdot\hat{N} + \underbrace{\binom{k}{2}\hat{D}^{k-2}\cdot\hat{N}^2 + \dots}_{=0 \text{ da } \hat{N}^2=0}\Big)J^{-1}$$

$$= J\cdot\left(\begin{pmatrix}(-1)^k & 0 & 0\\ 0 & (-1)^k & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}(-1)^{k-1} & 0 & 0\\ 0 & (-1)^{k-1} & 0\\ 0 & 0 & 2^{k-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot J^{-1}$$

$$= J\cdot\left(\begin{pmatrix}(-1)^k & 0 & 0\\ 0 & (-1)^k & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}0 & (-1)^{k-1} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot J^{-1}$$

Für ungerade k ergibt sich:

$$A^k = J\cdot\begin{pmatrix}-1 & k & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix}\cdot J^{-1} = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & k & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 8 & -5\\ -6 & -3 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4-6k & -8-3k & 5+3k\\ 6 & 3 & -3\\ 2^k & 2^{k+1} & 2^k\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2^k+6k-8 & 2^{k+1}+3k+2 & 2^k-3k+1\\ 2^{k+1}-6k+2 & 2^{k+2}-3k-5 & 2^{k+1}+3k+2\\ 2^{k+2}+6k+4 & 2^{k+3}+3k+8 & 2^{k+2}-3k-5\end{pmatrix}$$

Aus

$$\begin{pmatrix}s_{1000}\\ s_{1001}\\ s_{1002}\end{pmatrix} = A^{999}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

ergibt sich also:

$$s_{1000} = \frac{1}{9}\Big[-(2^{999}+6\cdot 999-8) + (2^{1000}+3\cdot 999+2) + 2(2^{999}-3\cdot 999+1)\Big]$$

$$= \frac{1}{9}\Big[(-1+2+2)\cdot 2^{999} + (-6+3-6)\cdot 999 + (8+2+2)\Big]$$

$$= \frac{1}{9}\Big[3\cdot 2^{999} + 3\cdot 999 + 12\Big]$$

$$= \frac{1}{9}\Big[3\cdot 4\cdot 2^{997} + 3\cdot 999 + 12\Big]$$

$$= \frac{1}{9}\cdot 12\cdot(2^{997}+1) + 333$$

$$\underline{\underline{= 4\cdot\frac{2^{997}+1}{3} + 333}}$$

0,5

$(3 \mid (2^{997}+1)$, denn $2=-1$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, also $2^{997} = -1^{997} = -1$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.)

2 | Analysis

Bestimmen Sie zu den Anfangswerten $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, $z_0 = 1$ eine explizite Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x\\ \dot{y} &= x + y\\ \dot{z} &= x - y + 2z\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

Lösung: $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \exp(A\cdot t)\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ 0,5

Explizite Berechnung:

Wir bestimmen zunächst JNF von A. (Im Tutorium habe ich JNF von A·t bestimmt. Das führt auch zum richtigen Endergebnis, ist aber sowohl aus praktischer als auch aus theoretischer Sicht unnötig kompliziert.)

$\chi_A = (1-x)^2(2-x) = -(x-1)^2(x-2)$ 0,5

$$A - \mathbb{1} = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix} \qquad A - 2\cdot\mathbb{1} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$(A-\mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$(A-\mathbb{1})(A-2\cdot\mathbb{1}) = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\-1& & \dots\\ & \dots & \end{pmatrix} \neq 0$$

Also $\mu_A = (x-1)^2(x-2)$. 0,5

Haupträume:

$$\mathrm{Hau}(A;1) = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ 0,5

$$\cup\!\shortmid$$

$$\ker(A - \mathbb{1}) = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ 0,5

$$\mathrm{Hau}(A;2) = \ker\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ 0,5

Jordanbasis: Wähle U_2, sodass gilt

$$\mathrm{Hau}(A;1) = \ker(A - \mathbb{1}) \oplus U_2 .$$

Offenbar $U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ mögliche Wahl. 0,5

Jordanbasis somit:

$$J = \left((A - \mathbb{1}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 0,5

$$J^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right), \text{ also } J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ 0,5

$$\mathrm{JNF:}\ \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\hat{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{N}} \quad (\hat{N}^2 = 0)$$

(Probe:

$$J^{-1} A J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$$

)

$$\exp(\hat{A}\cdot t) = \exp((\hat{D}+\hat{N})t)$$ ← erst hier wird t berücksichtigt

$$= \exp(\hat{D}t+\hat{N}t)$$

$$= \exp(\hat{D}t)\cdot\exp(\hat{N}t)$$

$$= \exp\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}\cdot\left(\mathbb{1}+\hat{N}t+\underbrace{\tfrac{1}{2}\hat{N}^2t^2+\ldots}_{0}\right)$$

0,5 für $\exp(\hat{D}t)$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5 für $\exp(\hat{N}t)$

$$= \begin{pmatrix} e^t & t\cdot e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

0,5 für $\exp(\hat{A}t)$

$$\exp(A\cdot t) = \exp(J\hat{A}J^{-1}t)$$

$$= \exp(J\hat{A}\cdot t\cdot J^{-1})$$

$$= J\exp(\hat{A}t)J^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & t\cdot e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t\cdot e^t & e^t & 0 \\ e^t & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ t\cdot e^t & e^t & 0 \\ t\cdot e^t & e^t-e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$ 0,5

Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ t\cdot e^t & e^t & 0 \\ t\cdot e^t & e^t-e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3e^t \\ (3t+2)e^t \\ (3t+2)e^t-e^{2t} \end{pmatrix}}}$$ 0,5

$$\left(= e^t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ (3t+2) \\ (3t+2)-e^t \end{pmatrix}\right)$$

Insgesamt 7 Punkte (2 Bonuspunkte), weil ich mich selbst bei dieser Aufgabe zu oft verzettelt habe.

3 | Einfältig

Sei K ein beliebiger Körper. Zeigen Sie, dass die einzige diagonalisierbare $(n \times n)$-Matrix über K mit genau einem Eigenwert $a \in K$ die Diagonalmatrix $a \cdot \mathbb{1}_n$ ist.

Für $A = a \cdot \mathbb{1}_n$ gilt:

A ist diagonalisierbar und $\chi_A = (a-x)^n$ hat genau eine Nullstelle in K, nämlich a, also hat A genau einen EW in K, nämlich a.

Sei nun A beliebige diagonalisierbare $n \times n$-Matrix über K mit genau einem EW a. Da A diagonalisierbar ist, existiert eine invertierbare Matrix $B \in GL_n(K)$ mit

$$B^{-1} A B = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$

Offenbar sind $a_1, \dots, a_n$ die verschiedenen EW von $B^{-1}AB$ und somit die verschiedenen EW von A. Also ist $a_i = a$ für alle i und somit

$$B^{-1} A B = a \cdot \mathbb{1}_n .$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} A &= B \cdot a \cdot \mathbb{1}_n \cdot B^{-1} \\ &= a \cdot B \cdot \mathbb{1}_n \cdot B^{-1} \\ &= a \cdot B B^{-1} \\ &= a \cdot \mathbb{1}_n . \end{aligned}$$

5

4 | Abkürzung

Zeigen Sie, dass die Jordan-Chevalley-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A = (a - X)^n$ für ein $a \in \mathbb{C}$ von der Form

$$A = a \cdot \mathbb{1}_n + N$$

ist, für eine nilpotente Matrix N.

Sei $A = D + N$ die JC-Zerlegung von A.
$\mathbb{C}^n$ zerfällt in die direkte Summe der Haupträume zu den verschiedenen EW von A. Da A nach Voraussetzung nur einen EW hat, gilt hier:

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Hau}(A; a).$$

Sei nun

$$A = \underbrace{D}_{\text{diagonalisierbar}} + \underbrace{N}_{\text{nilpotent}}$$

die JC-Zerlegung von A. Nach Lemma 15.21 gilt:

$$\mathrm{Eig}(D; a) = \mathrm{Hau}(A; a) \underset{\text{s.o.}}{=} \mathbb{C}^n.$$

Also ist D diagonalisierbar mit nur einem EW a.
Aus Aufgabe 3 ergibt sich also: $D = a \cdot \mathbb{1}$.

2,5

Offenbar lässt sich N direkt aus A und a berechnen. Nutzen Sie dies aus, um für die folgenden beiden Matrizen A^{100}, B^{100}, $\exp(A)$ und $\exp(B)$ zu berechnen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} ; \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

$$A^{100} = D^{100} + 100 \cdot D^{99} \cdot N + \binom{100}{2} D^{98} \cdot N^2$$

$$= 2^{98} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} + 100 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 2^{99} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 100 & -25 \cdot 99 \\ 0 & 2 & -100 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

0,5

$$\exp(A) = \exp(D + N) = \exp(D) \cdot \exp(N)$$

$$= \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbb{1} + N + \tfrac{1}{2} N^2 \right)$$

$$= e^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

0,5

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \chi_B = \det \begin{pmatrix} 5-x & 1 & 1 \\ -1 & 3-x & -1 \\ 0 & 0 & 4-x \end{pmatrix}$$

$$= (4-x) \cdot \det \begin{pmatrix} 5-x & 1 \\ -1 & 3-x \end{pmatrix}$$

$$= (4-x) \cdot \big((5-x)(3-x)+1\big)$$

$$= (4-x) \cdot (x^2 - 8x + 16)$$

$$= (4-x)\,(x-4)^2$$

$$= -(x-4)^3$$

Also ist $B = D + N$

mit $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $N = B - D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

eine JC-Zerlegung von B; $N^2 = \ldots = 0$.

0,5

$$B^{100} = (D+N)^{100} = D^{100} + 100 \cdot D^{99} \cdot N$$

$$= 4^{100} \cdot \mathbb{1}_3 + 25 \cdot 4 \cdot 4^{99} \cdot \mathbb{1}_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 4^{100} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 25 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 4^{100} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 25 & 25 \\ -25 & -23 & -25 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5

$$\exp(B) = \exp(D) \cdot \exp(N)$$

$$= e^4 \cdot (\mathbb{1} + N)$$

$$= e^4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5